LÓGICA 2010
ADICIONAL

LÓGICA
Folio. 11
2 2

FICHA DE CATEDRA

Estandarización de la técnica del condicional asociado y del método indirecto de asignación de valores de verdad. (Prof. Cecilia Duran)

Una oración (o proposición) condicional material debe distinguirse de un argumento, por ejemplo:
(1) Si mi automóvil funciona entonces tiene combustible. (condicional material)
(2) Dado que si un automóvil funciona entonces tiene combustible y que mi automóvil funciona, se sigue que mi automóvil tiene combustible. (argumento)
El condicional material es una conectiva veritativo funcional que permite formar proposiciones complejas a partir de proposiciones más simples. Su significado queda expresado en su tabla de verdad: un condicional material es verdadero si y sólo si su antecedente es falso o su consecuente es verdadero o, dicho de otro modo si no se da el caso que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso. Una oración condicional material verdadera establece una cierta *relación entre los hechos* expresados por el antecedente y el consecuente: el antecedente es condición suficiente del consecuente y el consecuente es condición necesaria del antecedente. Mientras que un argumento válido establece una *relación entre oraciones*; a saber, que si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también lo es.

A pesar de que una oración (o proposición) condicional material es distinta de un argumento, existe una *analogía* entre las condiciones de *tautologicidad* de una oración (o proposición) condicional material y las condiciones de *validez* de un argumento.

Un condicional material es tautológico, es decir $\vDash \phi \rightarrow \psi$[1], si y sólo si para toda valuación V se cumple que $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$. A su vez, dada la tabla de verdad del condicional material podemos afirmar que $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$ si y sólo si $V(\phi) = 0$ ó $V(\psi) = 1$; dicho de otro modo:

(3) $\vDash \phi \rightarrow \psi$ si y sólo si *no existe* una valuación V tal que $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 0$.

Supongamos ahora que el antecedente del condicional material es una conjunción de *n* oraciones: $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$. En este caso, para que se cumpla que un condicional tal sea tautológico, es decir $\vDash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$, deberá cumplirse que al menos uno de los conjuntivos del antecedente sea falso (con lo cual el antecedente es falso) o que el consecuente sea verdadero; o, dicho de otro modo:

(4) $\vDash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ si y sólo si *no existe* una valuación V tal que $V(\phi_1) = \ldots V(\phi_n) = 1$ y $V(\psi) = 0$.

[1] Empleamos variables metalógicas en lugar de letras proposicionales para indicar que tanto el antecedente como el consecuente podrían ser a su vez oraciones moleculares.

Adviértase que un esquema de argumento es semánticamente válido si y sólo si no existe un ejemplo de sustitución tal que sus premisas sean verdaderas y su conclusión sea falsa, es decir:

(5) $\vDash \phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ si y sólo si *no existe* una valuación V tal que $V(\phi_1) = \ldots V(\phi_n) = 1$ y $V(\psi) = 0$.

Dado un esquema de argumento, es posible construir una oración condicional *asociada* al mismo (pero que no debe confundirse con el argumento) de forma tal que el antecedente del condicional esté formado por la conjunción de las premisas del argumento y el consecuente sea la conclusión del argumento. Dado el esquema de argumento

$\phi_1, \ldots, \phi_n / \psi$

su oración condicional material asociada es

$(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$.

Supongamos ahora que el esquema de argumento es inválido, es decir existe al menos una valuación V tal que $V(\phi_1) = \ldots V(\phi_n) = 1$ y $V(\psi) = 0$. Adviértase que esa misma valuación permitiría determinar que el condicional asociado tiene al menos una valuación que lo hace falso, es decir no es tautológico.

A la inversa, si el condicional asociado no es tautológico, el esquema de argumento al cual está asociado no puede ser válido, pues tendrá al menos un caso de premisas verdaderas y conclusión falsa.

Ahora supongamos que el esquema de argumento es válido. En tal caso, según (5) *no existe* una valuación V tal que $V(\phi_1) = \ldots V(\phi_n) = 1$ y $V(\psi) = 0$. Pero entonces en este caso, el condicional asociado es tautológico, según (4). Y viceversa.

Es decir, la relación que nos interesa enfatizar entre un condicional material y un esquema de argumento consiste en que *las condiciones de tautologicidad de un enunciado condicional son análogas a las condiciones de validez de un esquema de argumento.*

Esta analogía es fecunda pues permite diseñar métodos de *decisión* para *determinar* la validez o invalidez de un argumento.

A continuación consignamos en forma resumida los pasos a seguir en dos procedimientos del tipo mencionado: el método del condicional asociado y el método indirecto (o abreviado) de asignación de valores de verdad.

(I) <u>Técnica del condicional asociado para determinar validez o invalidez de argumentos</u>:

1) Traducir el argumento al lenguaje de la Lógica Proposicional.
2) Construir el enunciado condicional asociado al esquema de argumento hallado en el paso anterior.
3) Asignar valores de verdad al enunciado condicional y resolver la tabla de verdad.

4) Interpretar el resultado:
   a. si el enunciado condicional es tautológico, el esquema de argumento al cual está asociado es válido (y por consiguiente todos sus ejemplos de sustitución son argumentos válidos);
   b. si el enunciado condicional no es tautológico, el esquema de argumento al cual está asociado no es válido (y por consiguiente todos sus ejemplos de sustitución son argumentos inválidos).

(II) Método indirecto de asignación de valores de verdad:

A. Aplicado para determinar la validez o invalidez de un esquema de argumento, dicho de otro modo, para determinar si las premisas implican lógicamente a la conclusión ($\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$) o no la implican ($\phi_1, \ldots, \phi_n \nvDash \psi$):
   1) Se supone que cada una de las premisas es verdadera y la conclusión falsa, es decir V(premisa) = 1, para cada premisa, y V(conclusión) = 0.
   2) Se intenta encontrar una asignación de valores para cada fórmula de modo que se cumpla la hipótesis.
   3) Resultado:
      (a) Si se encontró una asignación como la buscada se termina el ejercicio y, por cumplirse la hipótesis, el argumento es inválido.
      (b) Si toda asignación posible lleva a una contradicción con la hipótesis: se señala la o las contradicciones (en caso de que hubiere más de una asignación posible) y el resultado es que el argumento es válido.

B. Aplicado para determinar si una fórmula es una tautología ($\vDash \phi$) o no lo es ($\nvDash \phi$):
   1) Se supone que la fórmula es falsa, es decir que su valuación es 0.
   2) Se intenta encontrar una asignación de valores para la fórmula de forma tal que se cumpla la hipótesis.
   3) Resultado:
      a) Si se encontró una asignación como la buscada se termina el ejercicio y, por cumplirse la hipótesis, la fórmula no es una tautología.
      b) Si toda asignación posible lleva a una contradicción con la hipótesis: se señala la o las contradicciones (en caso de que hubiere más de una asignación posible) y el resultado es que la fórmula es una tautología.

C. Aplicado para determinar si dos fórmulas son lógicamente equivalentes ($\phi \vDash \psi$ y $\psi \vDash \phi$). Hay dos formas de construir la prueba:
   o Primera forma:
      - Si dos fórmulas son lógicamente equivalentes la primera implica lógicamente a la segunda y la segunda implica lógicamente a la primera. En este caso hay que hacer dos pruebas del tipo (A), la primera prueba para determinar si la primera fórmula implica lógicamente a la segunda y la segunda prueba para determinar si la segunda fórmula implica lógicamente a la primera.
      - Resultado:

- Si alguna de las fórmulas no implica lógicamente a la otra, no son lógicamente equivalentes.
- Si hay implicación lógica en los dos sentidos, son lógicamente equivalentes.

- Segunda forma:
  - Si dos fórmulas son lógicamente equivalentes, el resultado de unirlas por un bicondicional material es una tautología (véase Teorema 1, cap.2 del libro de Gamut: ϕ y ψ son lógicamente equivalentes si y sólo si $\models \phi \leftrightarrow \psi$). En este caso se unen las dos fórmulas por un bicondicional material y se determina si el enunciado resultante es o no una tautología a la manera de la prueba (B)
  - Resultado:
    - Si el bicondicional no es una tautología, las fórmulas no son lógicamente equivalentes
    - Si el bicondicional es una tautología, las fórmulas son lógicamente equivalentes.