S. S. Stevens.
"Matemáticas y medición"

Los numerales y la medición

Volvamos ahora al problema de la medición. Antes de que pueda prestar utilidad la parafernalia de las matemáticas en psicología, debemos desarrollar escalas de medición. Ahorraría al lector esta perogrullada si no fuera porque a veces hablamos el lenguaje de las conexiones funcionales y hablamos en términos de "más" o "menos" sin parecer comprender las implicaciones de nuestro discurso. Podemos decir, por ejemplo, que cuanto más frustrado está un hombre, más agresivo se pone. Se trata de un enunciado cuya traslación al lenguaje de proporcionalidad es fácil. Al hacerlo, se lee:

$$A = kF$$

esto es, agresión (A) es proporcional (k) a la frustración (F). Se trata de una noción interesante que nos gustaría poner a prueba. La tarea sería simple y automática si dispusiéramos de una escala para medir la agresión y de una escala diferente para medir la frustración. Cada una de esas escalas, como veremos, debería ser una escala de *razón* si deseamos mantener una relación de *proporcionalidad*. Si deseamos establecer una relación menos restrictiva, bastarían escalas *ordinales* o de *intervalos*.

Los requisitos de la medición son más fáciles de establecer que de cumplir, lo que no implica que siempre haya sido claro el significado de la medición. Conocemos por uno de sus más notables miembros que "los físicos más distinguidos, cuando intentan hacer un análisis lógico, son proclives a decir tonterías. Probablemente se dicen más cosas sin sentido [5] sobre la medición que sobre cualquier otra área de la física" (Campbell, 1938). Con esta seria advertencia ante nosotros, procedamos cautelosamente.

Puede afirmarse con bastante solidez que la medición supone el proceso de ligar el modelo formal llamado sistema de los números a algún aspecto diferenciable de los objetos o acontecimientos. Esta noción fue expresada casi al principio de este capítulo: "Medir es asignar numerales a los objetos o acontecimientos de acuerdo con reglas"; una perifrasis del mismo Campbell (1940; véase Stevens, 1946). Russell (1937), en la cita siguiente, parece estar de acuerdo con esta concepción: "Medir magnitudes es, en su sentido más general, cualquier método por el que se establece una correspondencia única y recíproca entre todas o algunas de las magnitudes de cierto tipo y todos o algunos de los números enteros, racionales o reales, según sea el caso... Medir exige algún tipo de relación biunívoca entre los números y las magnitudes en cuestión —una relación que puede ser directa o indirecta, importante o trivial, de acuerdo con las circunstancias—" (p. 176). Las definiciones de Campbell y de Russell son ambas excelentes, si las tomamos en su valor aparente. Parecen decir la misma cosa, excepto que una utiliza el término "numeral" y la otra el término "número". Ambas definiciones son liberales y generosas; de hecho muestran una generosidad de las que ambos autores parecen haberse retrotraído después, cada uno de un modo diferente. Pero esas defecciones no deben ocuparnos aquí.

El lector que quiera conocer algunos de estos sin sentidos —a los que Campbell parece haber contribuido con una buena porción— los encontrará en las deliberaciones de un comité nombrado por la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia para considerar las posibilidades de medición de la sensación (cf. Campbell, 1940). Para un análisis más sensato de los problemas planteados por este comité, véase Reese (1943).

Al utilizar dos palabras diferentes, "numeral" y "número" para referirse a lo que se relaciona con los objetos por medio de reglas semánticas, tanto Campbell como Russell intentaban probablemente indicar lo mismo. En otra publicación adopté el uso dado por Campbell, porque el significado del término "número" es frecuentemente ambiguo: entre otras cosas, se refiere a veces a un atributo físico de una colección de objetos discretos (un número de cacahuetes), a veces a la clase de clases isomórficas de Frege (números cardinales), y a veces a las expresiones relacionales de Russell (números de relación, de los que los números ordinales son una subclase). Intuyo que los números que Russell dedicaba a medir eran los números de relación.

El término "numeral" tiene el defecto de que a veces implica el trazo físico de tinta en un pedazo de papel y a veces implica la relación esencialmente *lógica* que puede representar el numeral. Este segundo significado es consistente con la visión formalista de las matemáticas, de acuerdo con la cual la aritmética se concibe como las reglas de un juego jugado con símbolos numéricos "cuya forma podemos reconocer, con independencia de lugar y tiempo, de las condiciones particulares de su manufactura y de minúsculas diferencias de ejecución" (reproducido por Weyl de Hilbert, p. 35). Campbell parece haber tenido presente este segundo sentido; probablemente también es el que tuvo Russell. En todo caso, hay dos hechos claros: 1) Se necesitan algunos términos nuevos y unívocos para estos diferentes significados[6] (aunque, siendo lo que es la inercia del uso, lo más probable es que sigamos teniendo esa necesidad), 2) Cualesquiera que sean los términos que se escojan, la esencia de la medición consiste en la asignación (a aspectos de objetos o de acontecimientos) de elementos sacados del sistema formal a los que se aplican los postulados del álgebra (cuadro 4). Estas asignaciones se hacen de acuerdo con una u otra de las reglas que discutiremos ahora.

[6] En un intento de distinguir entre el atributo de cardinalidad de los grupos de objetos (número en el sentido del profano) y el aspecto o atributo "subjetivo" que observamos cuando miramos (pero no contamos) una colección de objetos, yo utilicé las palabras "*numerosity*" y "*numerousness*" (numerosidad y numeridad) (Stevens, 1939b). Taves (1941) relacionó en un experimento la percepción visual de la "numerousness" con la de la "numerousity" física.

Escalas de medición

Una regla para asignar numerales (números) a aspectos de objetos o de acontecimientos crea una *escala*. Las escalas son posibles, en primer lugar, solo porque existe un isomorfismo entre las propiedades de la serie numeral y las operaciones empíricas que podemos realizar con aspectos de los objetos. Este isomorfismo, desde luego, es solo parcial. No *todas* las propiedades del número ni *todas* las propiedades de los objetos pueden aparearse en una correspondencia sistemática. Pero *algunas* propiedades de los objetos pueden relacionarse, mediante reglas semánticas, con *algunas* propiedades de la serie numeral. En particular, tratando con aspectos de los objetos, podemos invocar las operaciones empíricas para determinar la igualdad (la base para clasificar objetos), para obtener un orden jerárquico, y para determinar la igualdad de las diferencias y de las razones entre aspectos de los objetos. La serie convencional de los numerales —la serie en la que, por definición cada miembro tiene un sucesor— lleva a operaciones análogas. Podemos identificar los miembros de la serie y clasificarlos. Conocemos su orden tal como es dado por convención. Podemos determinar diferencias iguales como $7-5=4-2$ y razones iguales como $10/5=6/3$. Este isomorfismo entre el sistema formal y las operaciones empíricas realizables con objetos materiales justifica el uso del sistema formal como un *modelo* que represente aspectos del mundo empírico.

El tipo de escala obtenido cuando enviamos a los numerales para servir como representantes de un estado de cosas en la naturaleza depende del carácter de las operaciones empíricas básicas realizadas en la naturaleza. Estas operaciones están normalmente limitadas por las peculiaridades de la cosa que se desea medir con una escala, y por nuestra elección de procedimientos concretos; pero, una vez seleccionados, los procedimientos determinan que habrá uno u otro de cuatro tipos de escala: *nominal, ordinal, de intervalo, o de razón.* Cada una de estas cuatro clases de escalas encuentra su mejor caracterización en la amplitud de su invariancia —por las clases de transformaciones que no distorsionan la "estructura" de la escala—. Además, la naturaleza de la invariancia pone límites a los tipos de manipulaciones estadísticas que legítimamente pueden aplicarse a los datos de la escala. La cuestión de la aplicabilidad de las distintas técnicas estadísticas es de gran importancia práctica para varias de las ciencias.

Las características principales de las escalas están sintetizadas en el cuadro 6.[7]

Habrá de notarse que la columna que enumera las operaciones básicas necesarias para crear cada tipo de escala, es acumulativa: a cada operación enumerada frente a una escala particular se deben añadir todas las operaciones que la preceden. Así solo se puede elaborar una escala de intervalos, si se dispone de una operación que determine la igualdad de los intervalos, para determinar la relación de mayor o menor, y para determinar la igualdad (ni mayor, ni menor). Para obtener una escala de razón, a las operaciones recién mencionadas se les debe añadir un método para determinar la igualdad de las razones.

En la columna que registra la estructura de grupo de cada escala se enumeran las transformaciones matemáticas que dejan invariante la forma de la escala (véase fig. 1). Así, cualquier numeral x en una escala puede ser reemplazado por otro numeral x', cuando x' es función de la x enumerada en la columna. Cada grupo matemático en la columna está contenido en el grupo que está inmediatamente por encima de él.

La cuarta columna presenta ejemplos del tipo de operaciones estadísticas apropiadas para cada escala. Esta columna

[7] El autor presentó una clasificación esencialmente equivalente a la del cuadro 6 en el Congreso Internacional por la Unidad de la Ciencia, setiembre de 1941. (La presente discusión sigue la presentación de Stevens, 1946.) La esencia del criterio de relacionar escalas de medición con grupos de transformación también está contenida en el libro de Neumann y Morgenstern sobre juegos y comportamiento económico (pp. 22-23). Los autores omiten mencionar el grupo correspondiente a la escala nominal, y llaman la atención específicamente sobre el grupo en el que no se permitiría transformación, esto es, donde, bajo el grupo de similitud, a se limitaría a la unidad.

es acumulativa en el sentido siguiente: *todas* las operaciones estadísticas enumeradas son admisibles para datos de una escala de razón. El criterio de adecuación de una operación estadística es su *invariancia* bajo las transformaciones de la tercera columna.

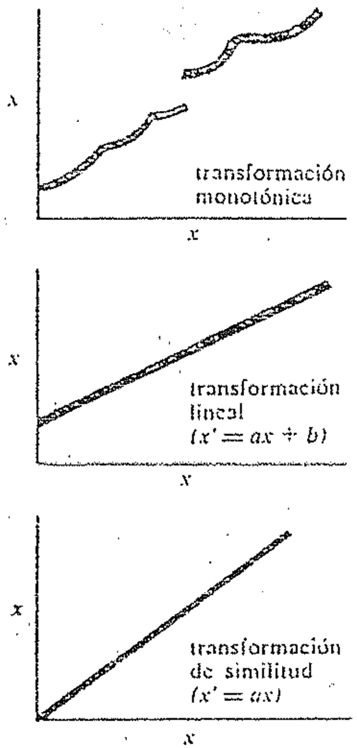

Fig. 1: Ejemplos gráficos de tres grupos de transformaciones. La función monotónica creciente, que puede tener discontinuidades del tipo mostrado en la figura, pertenece al grupo isotónico y es una transformación aplicable a escalas ordinales. La transformación lineal que intersecta la ordenada en el valor b, es aplicable a escalas de intervalo. Las escalas de razón permiten solo la transformación de similitud (multiplicación por una constante).

Es decir, el caso que se encuentra en la mediana (punto medio) de una distribución mantiene su "medianidad" bajo todas las transformaciones que preservan el orden (grupo isotónico), pero un ítem ubicado en la media solo permanece en la media (conserva su "mediedad") bajo transformaciones tan restringidas como las del grupo lineal. La razón expresada por el coeficiente de variación permanece invariante solo bajo la transformación de similitud (multiplicación por una constante).

Observemos que aquí están implicadas dos clases de invariancia. Si la medida estadística en cuestión no tiene dimensión[8] (por ejemplo, el coeficiente de correlación momento-producto, el coeficiente de variación, etcétera), el valor numérico de la medida estadística queda fijo cuando se somete a las escalas a las transformaciones que les están permitidas. Pero cuando la medida estadística tiene dimensión (por ejemplo, media, mediana, etcétera) su valor numérico varía de acuerdo con las transformaciones aplicadas a la escala. Así, la altura del *hombre medio*, en centímetros, es numéricamente diferente a su altura en pulgadas. Por otra parte, el hombre (o los hombres) cuya altura es promedio sigue siendo el mismo hombre (u hombres) ya sea que las medidas hayan sido tomadas en pulgadas o en centímetros. La invariancia requerida de las medidas estadísticas que tienen dimensiones es, pues, la identidad del objeto o hecho al que corresponde la medida estadística dada.

El valor numérico que adopta una medida estadística depende, desde luego, de sí misma y de la transformación. Por ejemplo, una transformación lineal $x' = ax + b$, operada sobre los valores originales de la escala, produce una media de $m' = am + b$, una desviación estandar de $\sigma' = a\sigma$, y una variancia de $\sigma'^2 = a^2\sigma^2$.

La última columna del cuadro 6 enumera algunos ejemplos típicos de cada clase de escala. Es un hecho interesante que la medición de muchas cantidades físicas haya progresado de

[8] Las dimensiones y la falta de ellas ocupan un lugar prominente en las fórmulas de la física. Los factores carentes de dimensión són generalmente los que están formados por razones en las que las dimensiones del numerador eliminan las del denominador, como en el caso de los decibeles. Medidas que tienen dimensiones son aquellas como la velocidad (que tiene la dimensión de la longitud dividida por la de tiempo), área (longitud por longitud), etc. En su *Dimensional Analysis*, Bridgman (1931) creó una especie de álgebra de las dimensiones que resultó útil en la investigación de las relaciones físicas. La noción básica es que los dos lados de una ecuación deben ser equivalentes en términos de sus dimensiones, y que una discrepancia en las dimensiones puede revelar un error que puede ser difícil de detectar con otros medios.

Cuadro 6

Escalas de medición

Las operaciones básicas necesarias para desarrollar una escala determinada son todas las enumeradas en la segunda columna, hasta e incluyendo la operación enumerada frente a la escala. La tercera columna indica las transformaciones matemáticas que dejan invariante la forma de la escala. Cualquier numeral x en una escala puede ser reemplazado por otro numeral x', donde x' es función de la x enumerada en la tercera columna. La cuarta columna enumera, en forma acumulada hacia abajo, a guisas de las medidas estadísticas que muestran invariancia bajo las transformaciones de la tercera columna.

Escala	*Operaciones empíricas básicas*	*Estructura matemática del grupo*	*Medidas estadísticas permisibles (invariantes)*	*Ejemplos típicos*
Nominal	Determinación de igualdad.	Grupo de permutacion $x' = f(x)$ [$f(x)$ significa cualquier sustitución biunívoca]	Número de casos Modo Correlación de contingencia	Numeración de jugadores de fútbol Asignación de números tipo, o modelos, a clases
Ordinal	Determinación de mayor o menor	Grupo isotónico $x' = f(x)$ [$f(x)$ significa cualquier función monotónica creciente]	Mediana Percentiles Correlación de orden (tipo O)	Dureza de minerales Calidad de cuero, madera, lana, etc. Grados de agrado de olor
Intervalo	Determinación de igualdad o diferencia de intervalos.	Grupo lineal general $x' = ax + b$	Media Desviación estándar Correlación de orden (tipo I) Correlación momento-producto	Temperatura (Fahrenheit y centígrados) Energía Fechas de calendario "Puntajes estándar" en tests de adquisición (?)
Razón	Determinación de igualdad de las razones.	Grupo de similitud $x' = ax$	Media geométrica Coeficiente de variación Transformación de decibeles	Longitud, peso, densidad, resistencia, etc. Escala de tonos Escala de intensidad de sonido

tipo en tipo de escala. Cuando los hombres conocían la temperatura solo mediante sensaciones, cuando las cosas eran sólo "más calientes" o "más frías" que otras, la temperatura pertenecía al tipo ordinal de escalas. Se convirtió en una escala de intervalo con el desarrollo de la termometría, y después que la termodinámica utilizó la *razón* de expansión de los gases para extrapolar a cero, se convirtió en una escala de razón.

Consideremos ahora, uno a uno, cada tipo de escala.

La escala nominal

La escala nominal representa la manera menos restringida de asignar numerales. Los numerales sólo se utilizan como etiquetas o números tipo; lo mismo servirían palabras o letras. A veces se distingue entre dos tipos de asignación nominal, como lo ilustran la "numeración" de los jugadores de fútbol para identificar a los individuos (tipo A) y la "numeración" de tipos o clases, donde a cada miembro de una clase se le asigna el mismo numeral. El primer tipo es de hecho, un caso especial del segundo, porque cuando designamos a nuestros jugadores de fútbol, estamos tratando con clases que tienen un solo miembro. Puesto que nuestro propósito se obtiene igualmente cuando se intercambian dos numerales cualesquiera, la estructura de esta escala permanece invariante bajo la sustitución general o grupo de permutación (llamado a veces grupo simétrico de transformaciones). La única medida estadística relevante para las escalas nominales de tipo A es el número de casos, por ejemplo, el número de jugadores a los que se ha asignado numerales. Pero una vez que se han formado clases conteniendo varios individuos (tipo B) podemos determinar la clase más numerosa (el modo) y, bajo ciertas condiciones, poner a prueba, mediante métodos de contingencia, hipótesis relativas a la distribución de casos entre las clases.

La escala nominal es un instrumento primitivo, y es natural que haya muchos que insistan que es absurdo atribuir a este proceso de asignar numerales la dignidad implicada por el término "medición" (véase Campbell, 1938 p. 122). Ciertamente no habrá disputa con esta objeción, porque poner nombre a las cosas es una tarea arbitraria. De cualquier modo que lo bauticemos, el uso de numerales como nombres de clases es un ejemplo de "la asignación de numerales de acuerdo con reglas". La regla es: no asignar el mismo numeral a diferentes clases o diferentes numerales a la misma clase. Aparte de esto, cualquier cosa concuerda con la escala nominal.

La formación de *clases* de objetos o acontecimientos se basa en la demostración de la *igualdad* con respecto a algún rasgo. Como problema empírico, la formación de clases no es en manera alguna trivial; ha habido interminables discusiones sobre criterios taxonómicos. La definición de cualquier substantivo común, como "caballo", crea problemas de clasificación —¿qué animales están incluidos, y cuáles están excluidos?— (véase Stevens, 1939a, p. 233). A nivel formal, la definición lógica (matemática) de clases y de igualdad es origen de muchos escritos y disputas. Es bastante curioso que la relación de igualdad, —descripta más arriba como reflexiva, simétrica y transitiva— sea tan "obvia" que recién hacia la década de 1930 se volvió corriente incluir los postulados que rigen esta relación básica en los libros de lógica (véase Bell, 1945, p. 578). Las matemáticas han aprendido a prestar atención a lo obvio, y las ciencias empíricas no necesitan excusarse nunca de seguir ese ejemplo.

Escala ordinal

La *escala ordinal* surge de la operación de ordenar rangos: Puesto que toda transformación que "preserve el orden" dejará invariante a la forma de la escala, esta escala tiene la estructura de lo que puede llamarse el grupo isotónico o preservador del orden. Este, desde luego, es un grupo amplio, porque incluye transformaciones para todas las funciones que crecen monotónicamente, es decir, funciones que nunca decrecen y por lo tanto no tienen máximos. Así, los valores positivos de la escala en una de tipo ordinal pueden ser reemplazados por su cuadrado, por su logaritmo, o por una multitud de otras funciones, incluyendo, en particular, la transformación "normalizadora" utilizada en el análisis factorial (Thurstone, 1947, p. 368). Todas estas transformaciones dejan invariable la relación de "*betweenness*" ("estar entre") de un valor determinado respecto a sus vecinos.

De hecho, la mayoría de las escalas utilizadas amplia y efectivamente por los psicólogos son escalas ordinales. En rigor, las medidas estadísticas comunes que implican el uso de medias y desviaciones estándares no se deberían utilizar con estas escalas, porque estas medidas implican el conocimiento de algo más que el orden jerárquico relativo de los datos. Por otra parte, en favor de este uso "ilegal" de la estadística se puede invocar una especie de ley fundamental: en muchos casos lleva a resultados fructíferos. Aunque la proscripción de este procedimiento probablemente no serviría a ningún fin útil, se debe señalar que el cálculo de medias y de desviaciones estándares en una escala ordinaria constituye un error en la medida que los intervalos sucesivos de la escala son de diferente tamaño. Cuando solo se conoce el orden jerárquico de los datos, debemos proceder con cautela con nuestras medidas estadísticas, y especialmente con las conclusiones que extraemos de ellas.

Aun aplicando aquellas medidas estadísticas que son normalmente adecuadas para las escalas ordinales encontramos a veces comprometida la exactitud. Así, aunque se indica en el cuadro 6 que se pueden aplicar los percentiles a los datos ordenados jerárquicamente, se debe señalar que el procedimiento usual de asignar un valor a un percentil por interpolación lineal dentro de un intervalo de clase queda, estrictamente hablando, totalmente fuera de todas las reglas. Del mismo modo, no es estrictamente adecuado determinar el punto medio de un intervalo de clase mediante interpolación lineal, porque precisamente la propiedad que se cuestiona de una escala ordinal es la linearidad.

Hay otro punto que requiere comentario. En discusiones anteriores (por ejemplo, Stevens, 1946) opiné que la correlación de orden de rango no se aplica a las escalas ordinales porque la derivación de la fórmula para esta correlación implica suponer que las diferencias entre rangos sucesivos son iguales. Mi colega, Frederick Mosteller, me convenció que se puede liberalizar esa perspectiva conservadora, con tal que el coeficiente que resulte (por ejemplo, ρ de Spearman, o τ de Kendall) sea *interpretado exclusivamente* como una prueba de hipótesis acerca del *orden*. Por otra parte, la interpretación del coeficiente como equivalente a r (el coeficiente momento-producto) presumiría una escala de intervalos subyacente, así como una distribución normal bivariable. En el cuadro 6 he permitido ambas interpretaciones, al ubicar la correlación de orden bajo ambos títulos: tipo O para el ordinal, tipo I para el intervalo.

Escala de intervalo

Con la escala de intervalo llegamos a una forma que es "cuantitativa" en el sentido ordinario de la palabra. Aquí son aplicables casi todas las medidas estadísticas usuales, a menos que sean del tipo que supone el conocimiento de un "verdadero" punto cero. El punto cero en una escala de intervalo es materia de convención o conveniencia, como surge del hecho de que la forma de la escala permanece invariable cuando se le añade una constante.

Nuestras dos escalas de temperatura, centígrada y Fahrenheit, ilustran el punto anterior. Iguales intervalos de temperatura en las escalas, denotan volúmenes iguales de expansión. Para cada escala se adopta un cero arbitrario. Un valor numérico de una escala se transforma en un valor de la otra mediante un ecuación de forma $x' = ax + b$. La energía también se mide en una escala de intervalo, porque, como dicen von Neumann y Morgenstern, "nada hay en la mecánica que permita establecer un cero o una unidad de energía" (p. 22). Nuestras escalas de *tiempo de calendario* proporcionan otro ejemplo, las fechas de un calendario se transforman en las de otro mediante la misma ecuación anterior. En estas escalas, desde luego, es absurdo decir que un valor es dos veces, o alguna otra proporción, mayor que otro.

Los *períodos* de tiempo, sin embargo, pueden medirse en escalas de razón; y en este caso un período puede correctamente definirse como igual al doble del otro. De manera semejante, las *diferencias* de energía (lo que entendemos por *trabajo*) pueden considerarse magnitudes de razón, medibles en escalas de razón. Las *diferencias* entre los valores de una escala de intervalo se convierten en medidas de una escala de razón por el simple hecho de que el proceso de determinar una diferencia (es decir, una sustracción) se desembaraza de la constante aditiva *b*.

Gran parte de la tarea de medición psicológica aspira a crear escalas de intervalo, y a veces lo logra. Normalmente el problema consiste en inventar operaciones para igualar las unidades de las escalas —un problema que no siempre es fácil de resolver, pero para el cual existen varios modos de aproximación—. La determinación de lo que llamamos distancias iguales es un procedimiento obvio. En las escalas psicológicas solo a veces existe preocupación por ubicar un "verdadero" punto cero. La inteligencia, por ejemplo, generalmente se mide en escalas ordinales que tratan de aproximarse a escalas de intervalo. No vale la pena definir qué significaría un cero de inteligencia (aunque tanto Thorndike como Thurstone lo han intentado).

A veces también se usa la variabilidad de una medida psicológica para igualar las unidades de una escala. Este proceso sabe a una especie de magia: a una cuerda mágica para trepar la jerarquía de las escalas. La cuerda consiste, en este caso, en la *suposición* de que, en la muestra de individuos examinados, el rasgo estudiado tiene una distribución canónica (por ejemplo, "normal"). Entonces se trata de un simple ajuste a las unidades de la escala de modo que cuando se miden los individuos aparezca la distribución supuesta. Pero este procedimiento, obviamente, no es mejor que el postulado gratuito que lo respalda, y aquí hemos de recordar lo que dijo Russell respecto al aire de ladrón que tiene la postulación. Hay quienes creen que los psicólogos que formulan supuestos cuya validez está fuera de confrontación se remontan con su mismo petardo, pero el hecho es que nos encontramos con que el supuesto de normalidad tiene en su favor una cierta utilidad práctica en la medición de muchos rasgos humanos. Obligados a comportarse de acuerdo con ciertos criterios de consistencia interna, como en el método de comparaciones apareadas (Véase Thurstone, 1948), tales supuestos permiten detectar problemas de preferencias o similares, que parecen recalcitrantes a otros tratamientos.

La escala de razón

Las escalas de razón son las que se encuentran más frecuentemente en física, y son posibles solo cuando existen operaciones para determinar la totalidad de las cuatro relaciones: igualdad, orden jerárquico, igualdad de intervalos, e igualdad de razones. En la práctica, la determinación de la última de estas cuatro relaciones —razones iguales— puede adquirir la forma de la determinación de intervalos sucesivos iguales a partir del valor cero de la escala. Este es *uno* de los procedimientos mediante el cual podemos asignar numerales de tal manera que las razones iguales entre ellos correspondan a razones iguales de algún atributo.

Una vez que se ha elaborado una escala de razón, sus valores numéricos pueden ser transformados (como de pulgadas a pies) solamente multiplicando cada valor por una constante. Siempre está implicado un cero absoluto, aunque el valor cero en algunas escalas (por ejemplo, la temperatura absoluta) pueda no producirse jamás. Todos los tipos de medidas estadísticas son aplicables a las escalas de razón, y solo con estas escalas podemos adecuadamente realizar el género de transformaciones implícito en el uso de decibeles, donde sacamos el logaritmo de la razón de dos cantidades de poder.

Es prominente entre las escalas de razón la misma escala de "número" —número, en el sentido empírico—, la escala que utilizamos cuando contamos objetos tales como huevos, centavos, y manzanas. Esta escala de la numerosidad de agregados es tan básica y tan común que ordinariamente ni siquiera se la menciona en los trabajos sobre medición. Este olvido podría sorprendernos si no hubiéramos aprendido ya, en conexión con la noción de igualdad, que a menudo las cosas más comunes y obvias son las que han sido descuidadas por más tiempo.

En la escala de numerosidad admitimos ordinariamente solo las transformaciones que implican la multiplicación por la unidad —el elemento de identidad del grupo de similitud— En otras palabras, generalmente contamos de a uno. Pero es claro que igualmente podríamos contar de a dos, de a tres, de a diez, etcétera. Podríamos asignar numerales a colecciones de objetos mediante una regla que nos llevaría a decir que la numerosidad de nuestros dedos del pie es dos y medio, en cuyo caso contaríamos de a cuatro.

En física es común distinguir entre dos tipos de escalas de razón: *fundamentales* y *derivadas*. Longitud, peso y resistencia eléctrica (y debemos añadir a esto la numerosidad) representan escalas fundamentales, mientras que densidad, velocidad y elasticidad, representan escalas derivadas.

Estas últimas son magnitudes *derivadas* en el sentido de que son funciones matemáticas de ciertas magnitudes fundamentales. En física son, de hecho, más numerosas que las magnitudes fundamentales, las que comúnmente se tienen por básicas porque permiten una operación física de adición análoga a la operación matemática de adición. Pesos, longitudes y resistencias pueden añadirse en el sentido físico, pero se concede a este importante hecho empírico mayor relevancia de la que merece en la teoría de la medición. Las llamadas escalas fundamentales son instancias importantes de escalas de razón, pero son sólo instancias.

En realidad se puede demostrar que se pueden establecer escalas fundamentales incluso cuando resulta imposible realizar la operación física de adición. Como ejemplo, considérese la escala de peso, y supóngase que vivimos en un mundo de materia explosiva, de modo que si separamos dos partículas de materia, y luego las ponemos juntas en el mismo platillo de la balanza, estallarán. (Sabemos de la existencia de tales materiales.) Necesitaríamos tres balanzas del siguiente tipo: 1) una balanza de tipo estándar de laboratorio, 2) una de tipo estándar (con el punto de apoyo en el centro del brazo horizontal) pero en la que un platillo cuelgue debajo del otro cuando los platillos estén vacíos, y 3) una de tipo estándar, en la que el punto de apoyo no esté en el centro del brazo. La primera balanza bastará para determinar igualdad y orden, la segunda determinará diferencias iguales, y la tercera razones iguales. Con la segunda balanza podemos medir entonces cualquier número requerido de muestras separadas por intervalos iguales. Llámese a esas muestras a, b, c, d,... Con la primera balanza podemos ordenar esta serie de menor a mayor. Después, con la tercera balanza, podemos conseguir muestras (A, B, C, D,...) relacionadas por razones iguales, aunque desconocidas. Al llegar a este punto aplicamos la primera balanza para encontrar qué miembros de una serie son iguales a cuáles de la otra. Supongamos que es

$$C = d, \quad D = j, \quad R = h, \quad S = p$$

Entonces C/D = R/S, y podemos reemplazar las letras mayúsculas por la letra d, más el número de intervalos entre d y las demás letras minúsculas correspondientes a las letras mayúsculas respectivas. Entonces C/D = R/S se convierte en

$$\frac{d}{d+6} = \frac{d+4}{d+12}$$

Resolviendo la ecuación encontramos que $d = 12$. Entonces, puesto que los intervalos a-b-c-d-e... son iguales, se sigue que $c = 11$, $b = 10$, $a = 9$, y $e = 13$... $h = 16$,... $j = 18$,..., $p = 24$, etcétera. Estos valores forman una verdadera escala de razón y sus pesos pueden servir como pesos "estándar" para medir otras cosas.

Mediante este procedimiento podríamos conseguir un conjunto de pesos cuyas propiedades serían completamente isomórficas con las propiedades de un conjunto determinado por lo que el físico llama medición fundamental —construido en el proceso de igualar pesos y de "adicionarlos"—.

Damos aquí esta descripción muy condensada de un procedimiento posible simplemente para mostrar que la adición *física* no es necesariamente la base de toda medición. También puede haber medición válida en los casos en que jamás se pueda proceder a colocar las cosas unas junto a otras o a apilarlas en un montón.

Concluimos, pues, que la definición de medida más liberal y útil es la de asignación de numerales a las cosas de modo de representar hechos y convenciones acerca de ellas. El problema de qué es y de qué no es medir se reduce entonces, a la simple pregunta: ¿Cuáles son las reglas, si las hay, bajo las cuales se asignan numerales? Si podemos señalar un conjunto consistente de reglas, obviamente estamos tratando con medición de algún tipo, y podemos entonces proceder a la pregunta más interesante: ¿De qué tipo de medida se trata? En la mayoría de los casos la formulación de las reglas de asignación descubre directamente el género de medición y por tanto el género de escala implicado. Si queda alguna ambigüedad, podemos buscar la respuesta final y definitiva en la estructura matemática del grupo de la forma de la escala: ¿de qué manera podemos transformar sus valores y lograr que siga cumpliendo todas las funciones que cumplía anteriormente? Sabemos que los valores numéricos de todas las escalas pueden multiplicarse por una constante, operación que cambia el tamaño numérico de la unidad (a menos que el multiplicador sea él mismo la unidad). Si, además, se puede añadir una unidad (o elegir un nuevo punto cero), esta es una prueba positiva de que no estamos tratando con una escala de razón. Entonces, si el propósito de la escala sigue cumpliéndose cuando sus valores se elevan al cuadrado o al cubo, no es ni una escala de intervalo. Y finalmente, si dos valores pueden intercambiarse a voluntad, se excluye la escala de orden y la única posibilidad que queda es la escala nominal.

Esta solución que se propone al problema de clasificar las escalas no intenta insinuar que todas las escalas que pertenezcan al mismo grupo matemático son igualmente precisas o exactas, o útiles o "fundamentales", ni siquiera que en la práctica se pueda decidir siempre a qué categoría corresponde una determinada escala. La medición nunca es mejor que las operaciones empíricas por medio de las cuales se realiza, y la calidad de las operaciones varía de mala a buena. Cualquier escala particular, psicológica o física, puede estar sujeta a objeciones, acusada de sesgo, poca precisión, poca generalidad, y de otros factores, pero quien formule tales objeciones debería recordar que estas son cosas relativas, que ninguna escala utilizada por mortal alguno está completamente exenta de esos defectos.

Referencias bibliográficas

Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, Nueva York, 1937.
Birkhoff, G. y MacLane S., *A Survey of Modern Algebra*, MacMillan, Nueva York, 1945.
Birkhoff, G. y S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, MacMillan, Nueva York, 1941.
Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis* (2ª ed.), Yale University Press, New Haven, 1931.
Campbell, N. R., "Symposium: Measurement and its Importance for Philosophy", *Proc. Arist. Soc. Suppl.*, *17*, Harrison, Londres, 1938.
Campbell, N. R. y otros, "Final Report", *Advanc. Sci.*, 1940, nº 2, pp. 331-349.
Carnap, R., *Introduction to Semantics*, Harvard University Press, Cambridge, 1942.
Courant, R. y H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, Nueva York, 1941.
Dantzig, T., *Number: The Language of Science*, MacMillan, Nueva York, 1939.
Harkin, D., *Fundamental Mathematics*, Prentice Hall, Nueva York, 1941.
Klein, F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover, Nueva York, 1945. (Traducción de la 3ª ed., 1924.)
Lewis, D., *Quantitative Methods in Psychology*, Iowa, 1948.
Morris, C. V., "Foundations of the Theory of Signs", *Int. Encycl. Unif.*, 1938, nº 1, pp. 63-75.
Neumann, J. von, y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (2ª ed.), Princeton University Press, Princeton. 1947.
Ore, O., *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, Nueva York, 1948.
Quine, W. V. O., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1947.
Reese, T. W., "The Application of the Theory of Physical Measurement to the Measurement of Psychological Magnitudes, with three Experimental Examples", *Psychol. Monogr.*, 1943, 55, nº 3, pp. 1-88.
Reichenbach, H., *Experience and Prediction*, University of Chicago Press, Chicago, 1938.
Reichenbach, H., *Elements of Symbolic Logic*, MacMillan, Nueva York, 1947.
Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy* (2ª ed.), MacMillan, Nueva York, 1920.
Russell, B., *The Principles of Mathematics* (2ª ed.), Norton, Nueva York, 1937.
Stevens, S. S., "Psychology and the Science of Science", *Psychol. Bull.*, 1939a, nº 36, pp. 221-263.
Stevens, S. S., "On the Problem of Scales for the Measurement of Psychological Magnitudes", *J. Unif. Sci.*, 1939b, nº 9, pp. 94-99.
Stevens, S. S., "On the Theory of Scales of Measurement", *Science*, 1946, 103, pp. 677-680.
Tarski, A., *Introduction to Logic*, Oxford University Press, Nueva York, 1941.
Taves, E. H., "Two Mechanisms for the Perception of Visual Numerousness", *Arch. Psychol.*, 1941, vol. 37, nº 265.
Thompson, D'Arcy W., *On Growth and Form*, MacMillan, Nueva York, 1942.
Thurstone, L. L., *Multiple Factor Analysis*, Chicago University Press, Chicago, 1947.