0,005 y 0,002 para las pruebas a) bilaterales y b) unilaterales.

5) En una escuela primaria se da una prueba ortográfica. Para los 32 varones la media fue 32 puntos con un s = 8 mientras para 36 chicas la media fue 75 con una desviación estandard de 6. Pruebe la hipótesis con un nivel de significación de 0,05 y de 0,01 de que las chicas son mejores que los varones en ortografía (zona de riesgo unilateral).

Folio 31

Bibliografía

1) ALLEN, W Y ROBERTS, H. V. **Statistics** N.Y. The Free Press of Glencoe, 1956
2) BLALOCK, H.M. **Social Statistics**, N.Y. Mc Graw Hill, 1960
3) EDWARS, A **Experimental Design in Psycological Research** N.Y. Holt, Rinehart and Winston, 1964
4) GEHRING **Basic Behavioral Statistics**, Houghton Mifflin Boston, 1978
5) HAYS, W.L **Statistcs for Psychologists**, N.Y. Holt Rinehart and Winston,1963
6) PEATMAN, J.G. **Introduction to applied statistics**, N.Y. Harper Row, 1963

Cortada de Kohan
'Diseño Estadístico'

CAPÍTULO X

Prueba de χ^2 (ji al cuadrado)

Hasta ahora hemos visto algunas aplicaciones de tres distribuciones estadísticas fundamentales: la distribución binomial, la distribución normal y la distribución de la t de Student. Ahora veremos el empleo de una distribución nueva, la de χ^2 (ji al cuadrado) que tiene la característica de no ser paramétrica, es decir, que no requiere supuestos tan rigurosos con relación a los parámetros subyacentes de la población. En la prueba de χ^2 no necesitamos asegurarnos de que los datos de la distribución provengan de poblaciones o universos que se distribuyen normalmente. Por esto se denomina a este estadístico inferencial χ^2, como una prueba **no paramétrica** o de distribución libre. Además, ni siquiera requiere el empleo de una escala numérica continua sino que puede ser usado con datos nominales. La prueba tiene dos usos fundamentales que veremos enseguida: a) como prueba de **bondad de adaptación** ("goodness of fit") para comparar las frecuencias observadas con algún modelo teórico, y b) como **prueba de independencia** entre los datos de dos variables que nos interesa comparar.

X.1. Distribución muestral de χ^2

En muchas situaciones que se nos presentan en las investigaciones se desea comparar las frecuencias **observadas** en la rea-

13

45- 14B

lidad con las frecuencias esperadas que pueden deducirse de algún modelo teórico. Supongamos, por ejemplo, que al arrojar 100 monedas al aire, que creemos sanas, hallamos que aparecen 46 caras y 54 cruces. Estas son frecuencias observadas. Ahora bien, de acuerdo al modelo teórico binomial las frecuencias **esperadas** o teóricas deberían ser 50 caras y 50 cruces. La fórmula que se usa para hallar el valor de χ^2 es:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o - E)^2}{E}$$

siendo o = frecuencias observadas
E = frecuencias esperadas

En nuestro caso el valor de χ^2 de acuerdo a los datos sería:

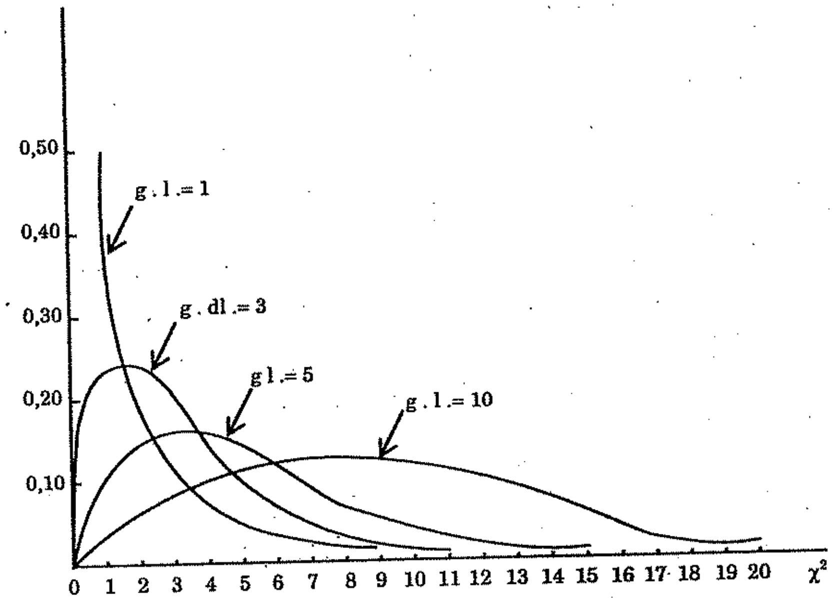
Moneda sale:	O	E	O - E	$(O - E)^2$	$\frac{(0 - E)^2}{E}$
Cara	46	50	–4	16	0,32
Cruz	54	50	+4	16	0,32
					$\chi^2 = 0{,}64$

En este caso, el valor de $\chi^2 = 0{,}64$ y los grados de libertad son uno, pues cuando se obtiene la frecuencia de cara, la de cruz ya está determinada, así que 2 – 1 = 1. Si repitiéramos esta experiencia muchas veces seguramente obtendríamos diversos valores de χ^2 y la distribución de frecuencias de todos estos valores sería una distribución experimental de muestreo de χ^2 para 1 grado de libertad.

Podríamos utilizar el mismo procedimiento para tirar no 100 monedas, sino 100 dados, y obtendríamos la distribución muestral de χ^2 para 5 grados de libertad (pues un dado tiene 6 caras). La distribución de muestreo teórica de χ^2 se conoce y sus probabilidades se han estimado, pero su ecuación es excesivamente compleja para presentarla aquí. Lo que es importante conocer es que existe una distribución de χ^2 para cada valor de los grados de libertad. En el **Apéndice B** se puede ver la **Tabla VIII** de los valores de χ^2 que van de 0 a infinito y que se usa como prueba de significación, del mismo modo que la tabla de la normal o de la t. Es decir, se supone la hipótesis de nulidad y si el valor de χ^2 es mayor o igual al nivel crítico usado, se rechaza la hipótesis nula. Por ejemplo, en nuestro ejemplo para 1 grado de libertad el valor de $\chi^2 = 0{,}64$, no es significativo ni a 1, ni al 5%.

La **Figura X.1** nos presenta la forma de algunas distribuciones de χ^2 para distintos grados de libertad.

Fig. X.1



La **Tabla X.1** nos indica el valor de χ^2 para el 5% y el 1% de significación para 1, 3, 5 y 10 grados de libertad.

Tabla X.1

Grados de libertad	Valor χ^2 para un riesgo del:	
	5%	1%
1	3,84	6,63
3	7,82	11,34
5	11,07	15,09
10	18,31	23,21

X.2. χ^2 como prueba de bondad de adaptación

La prueba χ^2, como señalamos, puede servirnos para relacionar las frecuencias observadas con las esperadas teóricamente, según algún modelo. Las comparaciones pueden ser muy variadas. Por ejemplo:

a) χ^2 para probar la significación de una distribución de igual proporción en todas las categorías.

Supongamos que hacemos una pregunta en una encuesta y las respuestas pueden ser Si, No o No sé. Si la indiferencia o el desconocimiento fuera total la proporción de respuestas en cada categoría sería igual, pero esto no suele suceder en la realidad. Por ejemplo, supongamos que la pregunta es "¿Conviene privatizar toda la Enseñanza Secundaria?".

Tenemos la **Tabla X.2** siguiente, donde están las respuestas a las categorías.

Tabla X.2

Respuestas	O	E	O - E	$(O - E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
Si	24	16	8	64	4
No	12	16	4	16	1
No se	12	16	4	16	1
	48	48		$\chi^2 = 6$	

g . 1 = (3 - 1) = 2 χ^2 significativo al 5%

b) χ^2 para probar la significación de una distribución respecto a la curva normal.

Supongamos que clasificamos 42 vendedoras en 5 grupos según la aptitud para vender en: sobresalientes, muy buenas, satisfactorias, regulares y malas. ¿Sigue esta aptitud para vender la distribución normal, como ocurre con casi todas las aptitudes, o no?

En las frecuencias **observadas** colocamos nuestros resultados y en las frecuencias **esperadas** o teóricas según la curva normal, colocamos los valores correspondientes a la división de 6 sigmas en 5 partes (categorías) con la proporción de casos correspondiente a cada categoría, según el área de la curva normal. Así:

entre +3 y 1,80 sigma - área = 0,0035 -> 1,5
entre +1,80 y 0,60 sigma - área = 0,24 -> 10
entre +0,60 y –0,60 sigma - área = 0,45 -> 19
entre –0,60 y –1,80 sigma - área = 0,24 -> 10
entre –1,80 y –3 sigma - área = 0,0035 -> 1,5

Según la **Tabla X.3** tenemos,

14 45 - 14B

Tabla X.3

Categorías de la variable	O	E	O - E	(O - E)²	$\frac{(O-E)^2}{E}$
Sobresalientes	6	1,5	4,5	20,25	13,50
Muy buenas	10	10	0	0	0
Satisfactorias	20	19	1	1	0,05
Regulares	4	10	6	36	3,60
Malas	2	1,5	0,5	0,25	0,17
	42	42	$\chi^2 = 17,32$		

$\chi^2 = 17,32$ para $(n - 1) = 4$ grados de libertad; el valor de χ^2 significativo al 1% es 15,08, de modo que debemos rechazar la H_o y decir que nuestra clasificación no se ajusta a la distribución normal de la aptitud para vender.

X.3. Corrección de Yates.

Cuando los grados de libertad en la prueba de χ^2 son uno, conviene usar la **corrección para continuidad de Yates**. En este caso la formulación es:

$$X^2 = \sum \frac{(|0 - E| - 0,5)^2}{E}$$

Es decir, reducimos el valor de O - E exactamente en medio

punto antes de elevarlo al cuadrado. Por ejemplo, supongamos que un sujeto que dice poseer poderes parapsicológicos asegura que puede ejercer influencia mental para que una moneda caiga cara o cruz. Entonces se tira una moneda 200 veces mientras el parapsicólogo se concentra para que la moneda caiga como cara, y los datos arrojan los resultados de la Tabla X.4.

Tabla X.4

	O	E	O - E	(O - E)²	$\frac{(O-E)^2}{E}$
Cara	114	100	14	196	1,96
Cruz	86	100	14	196	1,96
	200	200			$\chi^2 = 3,92$

Para 1 grado de libertad χ^2 al 5% = 3,84, por lo tanto, la prueba es significativa al 5%. Pero si usamos la **corrección de Yates** tenemos:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O) - E| - 0,5)^2}{E} = \frac{(|114 - 100| - 0,5)^2}{100} +$$

$$\frac{(|86 - 100| - 0,5)^2}{100} = \frac{13,5^2 + 13,5^2}{100} = 1,82 + 1,82 = 3,64$$

y en este caso, con la corrección, no es un valor significativo al 5%, es decir que la corrección de Yates implica una reducción del tipo I de error.

X.4.1 La prueba de χ^2 como prueba de independencia de los atributos

Dados dos atributos o variables cualitativas podemos comprobar si existe entre ellos total independencia o si, por el contrario, es probable que estén asociados. En el primer caso no podemos rechazar la hipótesis de nulidad, en el segundo sí.

Por ejemplo, supongamos que un investigador quiere saber si hay independencia o no entre dos atributos como el color de los ojos y de los cabellos. Los datos obtenidos se presentan en la **Tabla X.5** que sigue.

Tabla X.5

Color de ojos / Color cabellos	Negros	Azules	
Negros	80	30	110
Castaños	70	20	90
Rubios	40	60	100
	190	110	300

Para obtener las frecuencias esperadas en este caso se utiliza el concepto del teorema de "probabilidad compuesta" o ley de la multiplicación, que afirma que la ocurrencia simultánea de 2 o más hechos independientes es el producto de sus probabilidades por separado. Así, en nuestro caso, la probabilidad de que un sujeto al azar entre 300 tenga cabellos rubios es 100/300. La probabilidad de que un individuo tenga ojos azules es 110/300. Si el color de los ojos y de los cabellos fuera totalmente independiente, la

probabilidad de que un individuo sea rubio y de ojos azules es el producto de sus probabilidades por separado, o sea 100/300 x 110/300, este valor de probabilidad (0,33 x 0,36 = 0,12) lo tenemos que multiplicar por nuestro N = 300 para tener la frecuencia esperada para ojos azules y cabello rubio, o sea 36. Por esto desde el punto de vista práctico para obtener la frecuencia esperada en una **Tabla** como la **X.5**, de doble entrada, se multitplican las frecuencias marginales correspondientes a cada celda y se divide por el número total de casos. En la **Tabla X.6** que sigue se han colocado las frecuencias entre paréntesis al lado de las observadas:

Tabla X. 6

Color de ojos / Color cabellos	Negros	Azules	
Negros	80 (69,7)	30 (40,3)	110
Castaños	70 (56,9)	20 (33,1)	90
Rubios	40 (63,4)	60 (36,6)	100
	190	110	300

Ahora, usando la fórmula común, calculamos:

$$\chi^2 = \frac{(80-69{,}7)^2}{69{,}7} + \frac{(30-40{,}3)^2}{40{,}3} + \frac{(70-56{,}9)^2}{56{,}9} +$$

$$+ \frac{(20-33{,}1)^2}{33{,}1} + \frac{(40-63{,}4)^2}{63{,}4} + \frac{(60-36{,}6)^2}{36{,}6} = 35{,}5$$

15 45- 148

¿Cómo se interpreta este valor? Cuando tenemos una tabla de contingencia o de doble entrada, los grados de libertad son columnas menos uno por hileras menos uno, es decir g.1 = (c – 1) (h – 1).

En nuestro caso tenemos: (2 – 1) (3 – 1) = 2 g.1, o sea que el valor crítico para un riesgo de 5% en nuestra tabla de χ^2 es de 5,99. Como el valor hallado es mucho mayor (35,5) podemos rechazar la hipótesis de nulidad, que en nuestro caso es la hipótesis de independencia entre los dos atributos: color de cabello y color de ojos. Esto sólo nos dice, según la prueba de χ^2, que no hay independencia entre estos 2 atributos. Si queremos saber si existe asociación y en qué grado, tendríamos que aplicar otras pruebas estadísticas adecuadas a nuestros datos, sean éstos nominales, ordinales o de intervalos.

X.4.2 Caso particular cuando la tabla es de doble entrada y de 2 x 2

En este caso χ^2 se puede calcular fácilmente sin necesidad de calcular las frecuencias esperadas. Supongamos que la Tabla modelo sea la presentada en la **Tabla X.7.**

Tabla X.7

A	B	A + B
C	D	C + D
A + C	B + D	N

En este caso, la fórmula que se usa, es:

$$\chi^2 = \frac{N\,(AD - BC)^2}{(A + B)\,(C + D)\,(A + C)\,(B + D)}$$

Por ejemplo, supongamos que un investigador piensa que no existe independencia entre sexo y afición al arte. Supongamos que los datos hallados son los de la **Tabla X.8.**

Tabla X.8

	Si	No	
Varones	20	40	60
Mujeres	25	15	40
	45	55	100

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\chi^2 = \frac{100\,(20 \times 15 - 40 \times 25)^2}{60 \times 40 \times 45 \times 55} =$$

$$= \frac{100(300 - 1000)^2}{5.940.000} = \frac{49.000.000}{5.940.000} = 8{,}249$$

Para 1 grado de libertad significativo a un nivel del 1%.

X.5 Supuestos que subyacen al empleo de la prueba de χ^2

Aunque χ^2 no requiere el supuesto de la distribución normal de los datos o de la homogeneidad de sus variancias, el uso apropiado de esta prueba tiene algunos límites:

1) Los casos o sujetos deben ser seleccionados al azar y de forma independiente.

2) El tamaño de las muestras debe ser razonablemente grande.

Es decir, las frecuencias **esperadas** deben ser 5 o más, con 2 o más grados de libertad. Si hay sólo un grado de libertad, por lo menos las frecuencias esperadas deben ser 100 o más. Obsérvese que se habla de las frecuencias esperadas (E) y no observadas.

3) Las categorías deben ser simultáneamente **exclusivas** y **exhaustivas**. Es decir ninguna observación puede incluirse en más de una celda y no deben dejarse datos fuera de la tabla.

4) Solamente son adecuados los datos **nominales**.

Ejercicios

1) Tiramos una moneda 200 veces al aire y salen 115 caras y 85 cruces. Pruebe la hipótesis de que la moneda es sana usando un nivel de significación de: a) 0,05; b) 0,01. Para el mismo problema use la corrección de Yates.

2) 5 monedas se arrojaron al aire 1.000 veces y se obtuvieron los siguientes datos:

Cara	n
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
	1.000

Halle el χ^2 y diga si el ajuste a la binomial es bueno.

3) La tabla siguiente presenta la cantidad de alumnos que aprobaron o no aprobaron con tres profesores, X, Y y Z. Pruebe la hipótesis de que las proporciones de alumnos que no aprobaron son iguales con los tres profesores.

	X	Y	Z	
Pasaron	50	47	56	153
No pasaron	5	14	8	27
	55	61	64	180

Bibliografía

1) BLALOCK, H. M.: **Social Statistics**, N.Y., Mc Graw Hill, 1960.
2) GOHRING, R.E.: **Basic Behavioral Statistics**, Houghton - Mifflin Co., Boston, 1978.
3) Mc NEMAR, Q.: **Psychological Statistics**, N.Y., John Wiley, 1962.
4) SIEGEL, S.: **Non Parametric Statistics**, N.Y., Mc Graw Hill, 1956.

16 45- 14B

CAPÍTULO XI

Correlación entre dos variables

XI.1. Estadística bivariada

Hasta ahora hemos considerado, en general, el estudio de una variable. Pero para la ciencia resulta a veces muy importante apreciar las variaciones de los valores de una variable en relación con la variación de los valores de otra variable.

La estadística que estudia las relaciones entre dos variables cualesquiera, X e Y, se llama estadística **bivariada**. La inquietud por este tipo de estudios fue iniciada en 1885 cuando Galton publicó un trabajo en el que se interesaba por la predicción de las características físicas de los hijos, conociendo las características físicas de sus padres. Galton demostraba que si en una población la media de altura era de 1,60 y se casaban dos personas muy altas, digamos de 1,80m., los hijos medían tallas inferiores a los padres, es decir, se acercaban o "regresaban" a la media de la población, y si se casaban dos personas muy bajas, por ejemplo 1,40, los hijos tenían tallas algo más altas, es decir, también "regresaban" a la talla media de la población.

180 – 180   140 – 140

170   150